

A New Constitutive Equation of Elastic Materials

Eizo NAKAZA

1. 従来の弾性理論の問題点

図1に示す縦 (x_3 軸) 方向一軸圧縮の問題に対して、従来の弾性理論は、ヤング率を導入し、次のフックの法則を与える。

$$\sigma_3 = Y \varepsilon_3 \quad (1)$$

ここに、 σ_3 は最小主応力、 ε_3 は最小主ひずみ、 Y はヤング率を表す。

次に、横 (x_1 軸) 方向については、式(1)に示すフックの法則を適用すると、 $\sigma_1 = 0$ であり、 $\varepsilon_1 = 0$ を与え、これは実験結果に反する。

Poisson は、ここで次の関係式を与えている。

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\nu \varepsilon_3 \quad (2)$$

ここに、 ε_1 及び ε_2 はそれぞれ横方向及び奥行方向の主ひずみ、 ν はポアソン比を表す。

図1の材料の左側には、従来の弾性理論による上の関係式の展開が示されている。

以上によって、主応力($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$)と主ひずみ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$)が求められる。

このような結果は、体積弾性係数 K とせん断弾性係数 G の2つの弾性係数を導入する弾性理論によっても、当然ながらまったく同じように与えられる。体積弾性係数及びせん断弾性係数をヤング率及びポアソン比を用いて表すと次のとおりである。

$$K = \frac{Y}{3(1-2\nu)}, \quad G = \frac{Y}{2(1+\nu)} \quad (3)$$

従来の弾性理論は解析結果として、一般に応力分布図とひずみ分布図を与える。しかしながら、一軸圧縮という単純な例〔式(2)〕に見るように、応力やひずみが解析できたとしても ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\nu \varepsilon_3$)、そこには応力は存在しないことを示し ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$)、応力とひずみに関連性が存在しない形になっている。これでは、**なぜ材料の横方向に変形が生じるのか** (ポアソン効果) を力学的に説明できない。すなわち、従来の弾性理論においては、弾性材料の持つ一つの特性であるポアソン効果を説明すべき応力がミッシングとなっているのである。

こうした問題の根源は、Poisson のポアソン比の導入〔式(2)の導入〕にある (別の言い方をすると、2つの弾性係数を導入したことにある)。式(1)は材料の変形が応力の作用によることを表すが、式(2)は応力の作用とは無関係にひずみ比によってひずみの発生を予測する形になっているため、力学を成していない。すなわち、式(1)はフックの法則という力学的関係を成すものであるが、式(2)が力学的関係になっていない。いわば単に「ひずみの予測が出来ればよい」という形になっている。

一方で、せん断応力 ($i \neq j$) については、一般に以下の関係式が成立する。

$$\sigma_{ij} = 2G \varepsilon_{ij} \quad (4)$$

式(4)は、式(1)と同様に、応力テンソル σ_{ij} とひずみテンソル ε_{ij} が比例する形にあり、フ

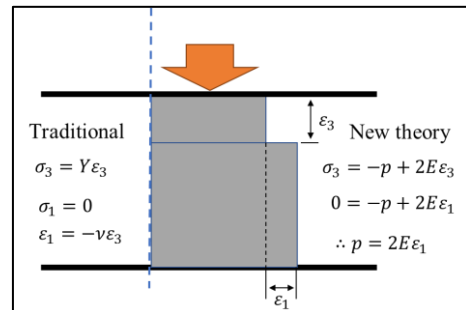


図1 材料の一軸圧縮試験

ックの法則を成している。すなわち、「せん断応力の作用で材料にせん断ひずみが生じる」ことを表している。

普通に材料の一軸圧縮試験を行ってみると、材料はおおかた図2に示す形に、すなわち载荷軸方向に対してほぼ45°傾いた方向に破壊面を示して破壊する。主応力に対してほぼ45°に傾いた方向に破壊面が存在することから、材料破壊は最大せん断応力によるものとの解釈が生まれた。こうした考えが、破壊基準としてトレスカの最大せん断応力説や、それを発展させたミーゼスの相当応力説となっている。

だが、材料試験をさらに慎重に行う実験からは、一軸圧縮下では図2のような破壊形態ではなく、図3に示すように、载荷軸（主応力）方向に破壊面を持つ破壊となることが明らかとなった。このような事実を説明するために、従来の方法は、中間主応力の作用を想像して、内部摩擦角を導入し、破壊面の設定を最大せん断応力面の方向（45°の方向）から立てた。だが、この場合、破壊面は最大主応力面（引張面）にあるのであって、破壊面上の応力をせん断応力の作用で説明するには無理があった。

その後、破壊基準や破壊面の設定には、よりよく実際の現象を説明するために、実にさまざまな方法が誕生している。しかしながら、それらのいずれも一長一短の存在が指摘されている。

結論：従来の弾性理論においては、応力分布を提示しても、必ずしもそれに応じて材料の変形が現れるわけではない。逆に、ひずみ分布を提示しても、必ずしもそれに応じて応力分布が現れるわけでもない。すなわち、応力分布とひずみ分布とが相補的になっていない。せん断応力については、応力とひずみが比例関係にあるが、一般に材料はさまざまな応力を受けるため、せん断応力説のみでは、材料の受けている応力状態や破壊基準を説明することはできない。これらの問題の根源は、式(2)の存在、すなわちポアソン比の導入にある。言葉を変えるのなら、2つの弾性係数を導入することにある。したがって、応力解析で応力分布とひずみ分布とを提示する従来の方法は、それらの存在が相補的でなく、誤った論理となっていることが指摘される。

以上のことから、応力解析を行い、応力分布とひずみ分布とを見せる従来の弾性理論の説明は誤りであると結論される。

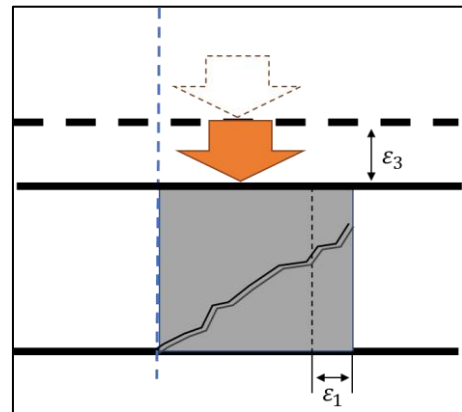


図2 材料の一軸圧縮破壊

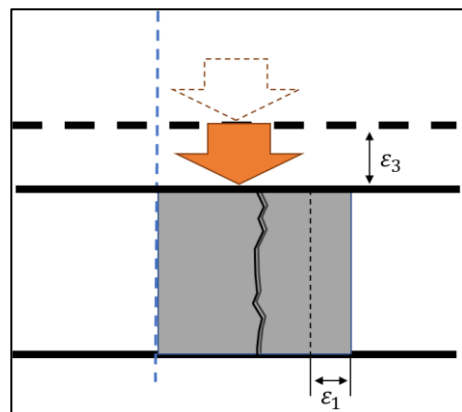


図3 材料の一軸圧縮破壊
(载荷板と材料端面との間の摩擦を極力取り除いた場合の結果)

2. 新弾性理論の登場

仲座 (2005) は、材料の内部応力として圧力を定義し、ただ一つの弾性係数を持つ弾性応力の存在を提示している。これを以下に新弾性理論と呼ぶ。

仲座の提示した内部応力の構成方程式は、次のとおりである。

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2E\varepsilon_{ij} \quad (5)$$

ここに、 σ_{ij} は応力テンソル、 ε_{ij} はひずみテンソル、 p は圧力 (以下、内部圧とも呼ぶ)、 E は唯一の弾性係数、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタテンソルを表す。

式(5)において、圧力 p は、熱力学の教えによれば、一般に材料密度 ρ と温度 T の関数として状態方程式によって定められる。従来の弾性理論でミッシングとなっていた応力が、式(5)では圧力となって顕在化している。

弾性応力テンソル τ_{ij} は、次のように定義される。

$$\tau_{ij} = 2E\varepsilon_{ij} \quad (6)$$

すなわち、弾性応力テンソルとひずみテンソルとは互いに比例し、フックの法則を成す。

式(5)によれば、

$$2E\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij} \quad (7)$$

となることから、材料の変形は応力 σ_{ij} の作用のみではなくて、内部圧 p の作用にもよることが示される。

式(7)より、

$$\int 2E\varepsilon_{ij}d\varepsilon_{ij} = \int (\sigma_{ij} + p\delta_{ij})d\varepsilon_{ij} \quad (8)$$

であり、

$$W = E\varepsilon_{ij}^2 \quad (9)$$

を得る。ここに、 W は弾性ひずみエネルギーを表す。

すなわち、弾性ひずみエネルギーは、材料の変形箇所に余すことなく存在するのである。式(7)において、材料の変形は、応力 σ_{ij} の作用のみではなくて、内部圧 p の作用にもよると定義されているので、式(9)に至るのは当然の帰結と言える。

したがって、弾性ひずみエネルギーを

$$W = \int \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} \quad (10)$$

と定義する従来の弾性理論の説明は誤りである。従来の弾性理論においては、ポアソン効果を引き起こす応力がミッシングとなっているため、ひずみテンソル ε_{ij} を説明すべき応力が不足しているのである。

3. 新弾性理論の一軸圧縮試験への適用

図 1 の材料の右側に表示されている式の展開が、新弾性理論の一軸圧縮問題への適用例を表している。縦軸を x_3 軸とし、主応力と主ひずみについて、次の関係式が成立する。

縦方向に：

$$\sigma_3 = -p + 2E\varepsilon_3 \quad (11)$$

横方向に：

$$\sigma_1 = -p + 2E\varepsilon_1 \quad (12)$$

$$\sigma_2 = -p + 2E\varepsilon_2 \quad (13)$$

ここで、

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0 \quad (14)$$

であることから、

$$p = 2E\varepsilon_1 \quad (12')$$

$$p = 2E\varepsilon_2 \quad (13')$$

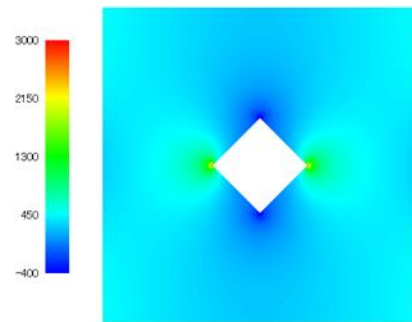
を得る。よって、Poisson が材料の横方向変形として観察したひずみ (ε_1 及び ε_2) は、内部圧 p の作用によるものであることが明らかとなる。すなわち、ポアソン効果は内部圧の存在を顕在化させるものであったといえる。また、圧力 p は弾性係数をただ一つとするフックの法則に則って材料に変形をもたらすことが分かる。逆に、圧力の大きさは、式(12') 及び(13')で与えられる。すなわち、等温状態変化に対する圧力の状態方程式はこれらの式で与えられる。

圧力は、材料に等方的変形を引き起こす。一軸圧縮の際には材料に等方的膨張変形を引き起こし、载荷による縦圧縮に材料が耐えられても、横方向には、いずれ圧力膨張によって材料は破壊することになる。弾性応力をバネの変形応力に例えるのなら、式(12') 及び(13')に示すように、内部圧の増大に弾性バネの伸びが耐えられなくなって、材料が縦方向に破壊面を持つ形に破壊すると判断される。

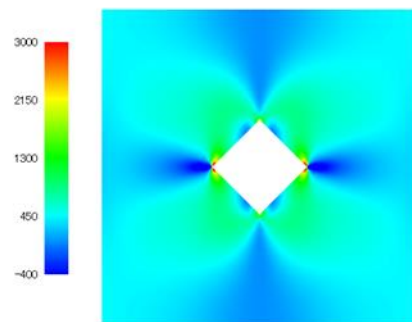
縦方向载荷の存在のみではなく、せん断荷重も作用するような一般的な応力の作用下の材料の破壊を想定すると、式(7)に示すように、材料は内部圧力 p と応力 σ の作用により変形するため、材料の破壊基準には、内部圧の状態と弾性応力（バネ応力）の状態とを共に据えなければならぬ。ひずみ分布は、式(6)に示すように、弾性応力の分布と相対的に等価となるため、特段の表示を必要としない。

図 4 は、中央に四角形の空洞部を有する供試体の一軸圧縮に対する FEM 解析結果（二次元解析）を示している。水理学においては、圧力分布と粘性応力分布とを頻繁に見てきたと思えるが、当然ながら、読者は恐らく初めて弾性材料の圧力分布及び弾性応力分布を目にするものと想定する。

図 4 によれば、空洞部の横隅部は最も強い引張応力（弾性応力の最大主応力）を受けている。しかし、この部分は同時に最も高い圧力をも受けている。すなわち、材料密度が高まっている。空洞部の上下隅部は比較的強い引張応力を受けると同時に、圧力の低下をも示しており、材料密



(a) 圧力 p の分布



(b) 主弾性応力 τ_1 の分布

図 4 四角形の空洞を持つ材料の一軸圧縮に対する応力の表示例

(ここでは、分布形の相異を見せることを目的としている。応力の単位は KPa である。)

度が低下していることを示している。このとき、材料は材料密度の低下と強い引張を受けている空洞部の上下隅部より縦方向に亀裂進展を見せることが推定されることになる。

結論：水理学や流体力学においては、流体の内部応力として、圧力分布と粘性応力の分布とが調べられている。同じ連続体力学として弾性力学もこれにならえば、弾性力学は、圧力分布と弾性応力分布とを明らかにする学問として再定義されなければならない。よって、応力解析の後に示されるべきは、圧力分布図と弾性応力分布図となる。それらは、互いに相補的に存在する。その例が図 4 に示されている。状態変化が等温のとき、状態方程式によって圧力は密度変化に比例するため、材料は密度（圧力）が低く、弾性応力の最大主応力が大きくなる場所で破壊することになる。このとき、破壊面は単純に弾性応力の最大主応力面に沿う。こうして、新弾性理論は、現象説明に一貫性を有する。

参考文献

- 1) Stokes, G. G: On the theory of internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids, Cambridge Trans., Vol. XVIII, 1945.
- 2) Timoshenko, S. P.: History of Strength of Materials, Dover Publications, 452p., 1983.
- 3) 仲座栄三：脆性破壊を示すコンクリートの破壊基準に関する研究，日本コンクリート学会，6p., 2009.
- 4) 仲座栄三：新・弾性理論，ボーダーインク，97p., 2010.

追記：1) 我々は、縦方向に伸びる主筋に巻き付ける帯筋（横筋）をせん断に対する補強筋などと呼び、それがせん断破壊防止となっていると説明してきている。上の説明から、それがせん断応力に対するというよりもむしろ圧力増大による断面膨張を防ぐ働きを持つことを説明できる。構造物の耐震補強工法なども場当たりの行われるのではなく、圧力と弾性応力の相補的存在の観点から議論されたものでなければならない。

個別要素法や剛体バネモデルなどの数値解析においては、弾性バネの伸縮によって発生する力を基本とするモデル化が行われている。このモデルの最大の問題点は、ポアソン効果がうまく解析できていないというところにあると言われている。ポアソン効果の発生メカニズムが圧力の存在にあることは、上の議論で見えてきたところである。したがって、圧力のモデル化を行うことで、この種の数値解析をさらに発展させることが期待される。

2) Navier は（1821 年頃）、等方弾性材料の弾性係数はただ一つでなければならないと主張している。Stokes（1845）は、自身による弾性体の運動方程式には主応力の平均値（平均圧力）が取り入れられている点を優れているところと説明している。だが、その定義は正しくなかった。新弾性理論には、Navier の主張と Stokes の試みとが、物理的に正しく具現化されている。