

Navier-Stokes 方程式の修正

Modification of the Navier-Stokes equation

○ 仲座栄三, 琉球大学工学部, 〒903-0213 沖縄県西原町千原 1 番地,

E-mail: enakaza@tec.u-ryukyu.ac.jp

Eizo NAKAZA, Ryukyu University, Senbaru-1 Nishihara Okinawa Japan-903-0213

The Navier-Stokes equation has been modified. Based on the theory of molecular motion of ideal gas, isotropic pressure has been introduced in the proposed theory. In the internal process, the excess stress between the pressure and the equivalent pressure acts as a viscous stress. The alternatives to the conventional equations have been verified in a comparison of attenuation of sound in Nitrogen gas between theory and experiment.

1. 問題提起

流体運動の支配方程式構築の際の最大の問題点として; ①圧力が経験的な定義に従う平均圧力(内部圧力の平均値の符号を変えて与えられる量)を導入していること、②その結果として粘性応力を偏差応力で定義していること;などを指摘できる。

従来の流体力学では、この平均圧力と平衡圧の差に第2の粘性応力が現れ、そこに第2の粘性係数が必要とされている。しかし、平均圧力は経験的に導入される応力であるから平衡圧との差は当然ながら予想される。そうすると、そこに流体の粘性という物性とは関係なく、必然的に第2の係数が必要となる。さらに、平均圧力からのずれの内部応力成分として定義される粘性応力も流体の粘性という物性を正しく反映しているかどうか疑われる。

通常の圧力下の通常の流体運動という条件下で、従来の流体力学は、かくして、一般に「2つの粘性係数が必要である」としている。本論は、従来の流体力学が2つの粘性係数を必要とする理由が、経験的に導入される平均圧力の導入に起因するものであって、必ずしも流体の粘性という物性からの要請でないことを示す。さらに、正しく定義される圧力の導入により、通常の圧力下の通常の流体運動に対し、第2の粘性係数がゼロと置き、「流体運動が1つの粘性係数を以て説明される」ことを示すものである。

2. 分子運動論的考察と新たな支配方程式の提案

今、ある軸方向に相対的圧縮を受ける理想気体の運動を考えると、その影響は衝突によりまずその方向の分子の並進運動エネルギーを増大させる。その増大された並進運動エネルギーは、衝突により他の方向の並進運動エネルギーに等分配される。

等分配された分子の並進運動エネルギーの一部が分子の内部エネルギーに等分配される過程で分子の運動が“圧力”として流体運動に与える応力は“等方的”である。また、分子の内部エネルギーの等分配が完了する間の圧力は、分配が完了した後の圧力に比較し大きい。この余剰圧力は、流体運動に抵抗し、エネルギーの消散を発生させる。ここに、内部過程で生じる“第2の粘性応力”が現れる。しかも、その粘性応力は通常の粘性応力と異なり、“等方性”を有するところを特徴とする。これらの過程で現れる等方圧力が“非平衡状態下の圧力 p ”として定義される。

この内部過程で生じる等方的余剰応力はひずみ速度の1次式で次のように表わすことができる。

$$p - p_e = -\kappa e_{kk} \quad (1)$$

ここに、 p_e は平衡圧、 e_{kk} は体積ひずみ速度であり、係数 κ は“第2の粘性係数”として定義される。

次に、Newtonの粘性法則として表わされ、通常の摩擦応力の作用をする粘性応力について考察する。

流体が相対的運動状態にあるとき、その相対速度差は同時に運動量の差となって現れる。その相対的運動量差の存在は、分子の不規則運動により均される。不規則な分子の作用が相対的運動量

差を均す過程で生じる非可逆的な運動量の拡散作用は、粘性応力の作用と同等である。したがって、その作用で生じる粘性応力(粘性応力テンソル τ_{ij})が次のように定義される。

$$\tau_{ij} = 2\nu(\rho e_{ij}) \quad (2)$$

ここに、 ρ は密度、 e_{ij} はひずみ速度テンソル、 ν は運動量の拡散係数であり、粘性係数 μ と $\mu = \rho\nu$ なる関係にある。よって、Newtonの粘性法則を表す新しい構成方程式が次のように与えられる。

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij} \quad (3)$$

以上により、内部応力の構成方程式が次のように提案される。

$$\sigma_{ij} = -(p_e - \kappa e_{kk})\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (4)$$

係数が一定と仮定される時、式(4)より、流体の運動方程式が通常の記号を用い、次のように与えられる。

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho X - \text{grad}(p_e - \kappa \text{div}v) + \mu \nabla^2 v + \mu \text{grad}(\text{div}v) \quad (5)$$

これまでの議論の物理的考察によると、第1粘性係数 μ 、第2粘性係数 κ は、それぞれ正值でなければならない。

通常の圧力および通常の流体運動の条件下において、内部緩和時間は相対的に十分小さいことが実験的に分かっているので、第2の粘性係数をゼロと置き、次式が流体の構成方程式をなす。

$$\sigma_{ij} = -p_e \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (6)$$

また、運動の支配方程式が次のように与えられる。

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho X - \text{grad}(p_e) + \mu \nabla^2 v + \mu \text{grad}(\text{div}v) \quad (7)$$

このとき、粘性係数はただ1つに限定される。

以上に見るように、分子運動論的には、経験的定義による平均圧力の導入の必要性や妥当性はどこにも見いだされない。また、通常の粘性応力に内部応力の平均値が関与しないこと理由も見出されない。

従来の流体力学は、単原子気体の場合に限り、粘性係数を1つとしている。このときのNavier-Stokes方程式は提案式(7)と異なる。平均圧力を導入しているので、次元数を表す係数“3”が現れるのが特徴的であり、粘性応力が偏差応力で表わされる。

経験的に導入された平均圧力の物理的不確かこそが、従来の流体力学で第2の粘性係数を不可避的に必要とさせた主要因と言える。提案式は、実験値との比較でもその妥当性が示されている。その点は、講演拡張要旨(CD版)を参考にしたい。

参考文献

- (1) Batchelor G.K.: *Fluid dynamics*, Cambridge University Press (1967), 615P. (2) Landau & Lifshitz, 竹内均訳: 流体力学1および2, 東京図書出版(1970), 596P. (3) 仲座栄三: 物質の変形と運動の理論, ボーダイニング(2005), 427P