

# 論文 脆性破壊を示すコンクリートの破壊基準に関する研究

仲座栄三\*1

**要旨:** 目視観察による人の直感的応力評価は、材料の変形具合から、「大きな変形箇所」に大きな応力が作用しているとするものである。しかし、従来の応力解析結果は必ずしもこうした人の直感的判断と一致するものでない。目視観察結果がそのまま応力評価に結び付き、そのことで破壊現象までも説明できるなら、極めて有用な応力評価法となる。本論では、そのような応力評価法が提案されている。複合応力を受けるコンクリートの破壊基準に提案手法が適応され、その妥当性が示されている。

**キーワード:** 脆性材料, 脆性破壊, 応力分布, ひずみ分布, 破壊応力, 破壊基準, フックの法則, 弾性係数

## 1. はじめに

コンクリート材など、引張に弱い脆性材料の応力評価においては、一般に引張応力、すなわち最大主応力の作用箇所が調べられる。しかし、応力状態の最も単純な1軸圧縮試験を例にとると、材料は最大主応力がゼロのまままで破壊に至るので、最大主応力分布のみの検討では当然ながら不十分となる。

したがって、そのような場合や複合応力が作用する場合などにおいては、最大主応力のみでなく、主応力の組み合わせ、あるいは最大せん断応力の分布などが調べられている。こうした従来の応力評価手法は、作用応力が2軸応力状態までなら比較的容易に行えるものの、3軸応力状態の場合には複雑なものとなり、降伏基準や破壊基準の設定も複雑なものとなる傾向にある。

ところで、目視によって材料の変形具合を観察するとき、直感的にはよくひずんでいる箇所が大きな応力の作用を受けているのではないかと推測されるものである。また、脆性材料の破壊は、通常、引張ひずみの最も大きい箇所を起点として、引張ひずみ面に沿って破壊しているのがよく観察される。

後に詳しく議論されるが、単純引張試験、曲げ試験、割裂試験、単純せん断試験、いずれの場合においても、目視観察に違わず、材料は引張面に作用する引張応力による破壊と判断される。また、その引張応力を以て破壊応力に設定できる。

しかしながら、最も単純な1軸圧縮の場合、破壊面は最大主応力面に沿うものであっても、破壊応力は最大主応力面に直角方向の圧縮応力を以て評価される。その他の破壊が全て引張応力によるものと判断されるのに対し、この場合は破壊面に垂直な面に作用する圧縮応力を以て測られるところが他の破壊の場合との大きな相違点でもあり、応力評価法の一貫性を破る所以でもある。

目視観察による直感的な人の判断は、「よくひずんでいる箇所に大きな応力が作用し、引張ひずみを最も大き

く受ける箇所でコンクリートのような脆性材料の破壊が生じる」というものとなっている。1軸圧縮試験の場合も含めて、こうした人の直感的判断と違うことなく応力評価が行えるような方法を見出し、その妥当性を示すことが本研究の主目的である。

本論は、まずコンクリートの破壊実験結果に基づき従来の応力評価の問題点を明らかにする。ついで、新たな応力評価手法の提案を行い、それを具体的にコンクリート材へ適用することを通じて提案手法の有用性を示す。

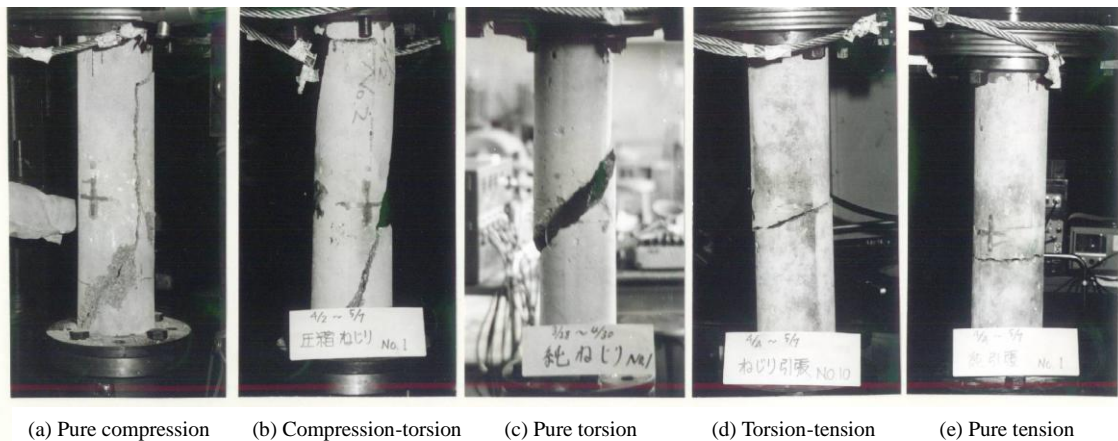
## 2. 従来の応力評価の問題点

図-1に、岡島<sup>1),2),3)</sup>が行った複合応力下のコンクリート材の破断面の変化に関する実験結果を示す(写真は、岡島達雄 名古屋工業大学名誉教授提供)。使用されたコンクリート材の圧縮強度はいずれも43MPaである。この実験において、供試体の高さとの比は  $H/D=3$  となっており、通常より幾分アスペクト比が高くなっているのは、材料端面の拘束力の影響をできるだけ材料中央部に及ぼさないための工夫とされる。

図の右側から順に、純引張、引張とねじり、純ねじり、ねじりと圧縮、純圧縮の各試験に対する破断面を表す。図示のとおり、全ての場合において、破断面は最大主応力面に沿う方向に走っている。純圧縮の場合に、材料端部付近に斜めに亀裂が走っている箇所が見えるが、それは材料端部の拘束力の影響と思われる。しかし、観察すべき材料中央部付近の破断面は確かに材料母線方向にあり、他の場合と同様、最大主応力面に沿う方向にある。したがって、脆性破壊を示すコンクリートの破壊は、複合応力作用下であっても全て最大主応力による破壊と推測される。

しかしながら、純圧縮の場合について従来の弾性理論に従って解析してみると、最大主応力は載荷開始から材料が破壊に至るまで常にゼロを示す。どの場合も、破断面は間違いなく最大主応力面に沿う方向にあるものの、

\*1 琉球大学 工学部環境建設工学科教授 工博 (正会員)



(a) Pure compression (b) Compression-torsion (c) Pure torsion (d) Torsion-tension (e) Pure tension

図-1 応力作用の相違による破断面の変化

応力がゼロのままでは、その応力を以て材料の強さを測ることはできない。

これに対し、ひずみの大きさを破壊基準に据えようとする立場からは、図-1 に示す破壊の全てが最大主ひずみ面に沿うものであり、たとえ1軸圧縮の場合であっても、破壊は最大主ひずみ、すなわち引張ひずみに起因するものとして説明可能である。すなわち、ここに示す全ての破壊に対し、破断面の方向および最大主ひずみの大きさを統一して整理できる。

こうして破壊基準をひずみにおく「ひずみ説」は有望視された時期もあった。しかしながら、破壊基準にひずみの大きさを据えることができたとしても、それから全ての場合に対して材料強度を求めることは困難である。例えば、1軸圧縮破壊の場合、破壊基準を基に最大主ひずみがいくら与えられても、その方向に働く最大主応力はゼロと予測され、材料強度の予測が行えない。そのようなことから、ひずみ説は現在ほとんど用いられていないようである。

ひずみ説に対し、トレスカやミーゼスの降伏基準を破壊基準に準用するものとして「最大せん断応力説」や「せん断エネルギー説」がある。これは、破壊要因をせん断応力に求めるものであるが、図-1 に示すコンクリートの破断面の方向がすべて最大主応力面に沿う方向にあるという事実を説明できるものでない。このことに関しては、内部摩擦角を導入し、破断面の方向を最大せん断面の方向から幾分ずらせるという方法もある。しかし、図-1 に示す破断面の方向を説明するには、直角に近い内部摩擦角を必要とするので、とうてい現実的とは言えない。

このような状況において、 $Wu^{4,5)}$  は、破壊基準にモール・クーロン型の基準を採用し、破断面の方向の予測にはひずみ説を適用するという複合型の破壊判定手法が推奨されると述べている。

Nelissen<sup>6)</sup>、Kupferら<sup>7)</sup> は、主応力の組み合わせがなす合成応力を調べている。たとえば、2軸応力状態の場合、2つの主応力の組み合わせで破壊応力が決定されるというものである。この方法はかなり研究されているが、複雑な3軸応力状態の予測が難しい。また、破壊応力の予測は可能としても、破断面の方向の予測が難しい所となっている。

ここで、話を最初の議論に戻すと、図-1 に示すように、全ての破断面の方向は最大主応力面の方向で説明できる。また、純圧縮の場合を除けば、材料の強さも最大主応力を以て説明可能である。したがって、「最大応力説」は、1軸圧縮の場合を除けば有用な応力評価と言える。

1軸圧縮の場合の問題点は、例えば縦方向1軸圧縮に対し、横方向に引張ひずみが観測されるのに対して、引張応力、すなわち最大主応力が常にゼロとなるところにある。ひずみは引張として観測されるのに、それを引き起こす引張応力の存在は何ら予測されるものではない。すなわち、材料変形が観測されても、それを引き起こす応力の存在は予測されていない。このことをよく考えてみると、「作用応力の大きさと材料変形量が比例する」ことを規定するフックの法則に反するように思える。

縦方向1軸圧縮に対し、横方向に、ひずみと応力が比例していない。材料に変形が生じていても、理論的予測は、そこに応力が存在しないとさえ判断させる。ここに、「従来の応力評価ははたして正しいのだろうか？」という疑義が投げられよう。

### 3. ポアソン効果と新しい応力評価法

フックの法則は、「応力とひずみが比例する」と述べている。これは、「ひずみが観測される個所にはそれを引き起こした応力が必ず観察されなければならない」と

も解釈される。

ここでは、1 軸圧縮の際、横方向にひずみが観測されてもそれを引き起こす応力の存在が予測されないことの問題点を考えることから始め、新しい応力評価法の提案を行う。

ポアソンは、1 軸圧縮の際の横方向ひずみを説明するために、ポアソン比を導入している。すなわち、横方向ひずみは縦方向ひずみからポアソン比を介して予測されるとする「ポアソンの経験則」を導入している。以下、応力の作用方向と直角方向にひずみが観測される現象を「ポアソン効果」と呼ぶことにする。

「縦方向ひずみから横方向ひずみが予測される」とするポアソン比の導入は、応力とひずみを結びつけるフックの法則とは明らかに異なる理屈に基づくひずみの予測となっている。ここに、ひずみが観測されても、応力が予測されない所以を見ることが出来る。

フックの法則に単純に従うなら、横方向ひずみを引き起こす応力の存在を想定しなければならない。すなわち、「ポアソン効果を引き起こす応力が存在する」と考えなければならない。なぜなら、フックの法則は、「ひずみは応力に比例する」と述べているからである。明らかにその応力は、外部に存在するものでない。したがって、材料内部にその発生を認めなければならない。

ポアソンは、縦方向 1 軸圧縮に対し、横方向と奥方向のひずみを等しく置き、それらが次のように予測されるとした<sup>8)</sup>。

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\nu\varepsilon_3 \quad (1)$$

ここに、 $\varepsilon_3$ 、 $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$  は、それぞれ縦方向、横方向、奥方向のひずみであり、 $\nu$ はポアソン比である。

当然ながら、横方向と奥方向にポアソン効果によるひずみが等しいのは、材質の等方性に基づく。

これに対し、縦方向、すなわち載荷方向には、次のようにフックの法則が成立している。

$$\sigma_3 = Y \varepsilon_3 \quad (2)$$

ここに、 $Y$  はヤング率である。

フックの法則・式(2)からは、ひずみの観測値に従ってそれを引き起こす応力が予測される形となっている。しかしながら、ポアソンの経験式(1)からは、ひずみの予測はできても、応力の予測は何らできない形にある。

式(1)を式(2)の形にまとめ、整理すると以下に示す従来との関係式を得る。

$$\sigma_1 = Y(\varepsilon_1 - \theta) \quad (3)$$

$$\sigma_2 = Y(\varepsilon_2 - \theta) \quad (4)$$

$$\sigma_3 = Y(\varepsilon_3) \quad (5)$$

ここに、 $\theta$  はポアソン効果による等方ひずみを表し、式(1)に従い、 $\theta = -\nu\varepsilon_3$  で予測される値である。

ここで、注目すべきは、式(3)および(4)に等方ひずみ  $\theta$  が導入されているにも関わらず、載荷方向の縦方向にはそれが導入されていない点にある。驚くべきことに、基礎式で、ポアソン効果の等方性が満足されていない。

ポアソン効果の等方性を基礎式に正しく反映させるには、この効果はつぎのように導入される必要がある<sup>8),10)</sup>。

$$\sigma_1 = 2E(\varepsilon_1 - \theta) \quad (6)$$

$$\sigma_2 = 2E(\varepsilon_2 - \theta) \quad (7)$$

$$\sigma_3 = 2E(\varepsilon_3 - \theta) \quad (8)$$

ここで、係数は弾性係数である。ヤング率は式(5)から算出される係数であり、ここに新しく導入される係数  $E$  は、式(6)～(8)を満たす弾性係数である。また、その前につく係数“2”は、後に示す基礎式の一般化を考えて導入されている。しかし、このことがここにおける議論の本質を曲げるものではない。

式(6)～(8)に示す応力とひずみの関係は、左辺に示す「応力」と右辺に示す「ひずみ」の比例関係を表し、フックの法則をなす。

ところで、フックの法則に単純に従えば、応力とひずみは比例するものであり、ポアソン効果によるひずみもそれを引き起こす応力と比例関係にあることが求められる。ここで、ポアソン効果を引き起こす応力を  $p$  で表すことにすると、 $p$  と  $\theta$  の間にも次に示す関係が求められる。

$$p = 2E\theta \quad (9)$$

式(9)の導入により、ポアソン効果を表すひずみが観測されれば、フックの法則に則り、それを引き起こす応力  $p$  が予測されることになる。

式(9)を式(6)～(8)に導入し、一般化すると次なる構成方程式が得られる<sup>8)</sup>。

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2E\varepsilon_{ij} \quad (10)$$

ここに、 $\sigma_{ij}$  は応力テンソル、 $\varepsilon_{ij}$  はひずみテンソル、 $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタである。

応力  $p$  は、ポアソン効果に係る内部応力を表す。当然ながら、式(9)の関係に従い、等方応力である。これに対し、応力テンソル  $\sigma_{ij}$  は外部応力を表す。以下、応力  $p$  を「内部圧」と呼ぶことにする。

外部応力と内部圧は共に材料に能動的に作用し変形をもたらす。それらの応力を左辺にまとめると次式を得る。

$$\sigma_{ij} + p\delta_{ij} = 2E\varepsilon_{ij} \quad (11)$$

さらに、左辺に示す全ての応力をまとめて、応力テンソル  $\tau_{ij}$  で表すと次式を得る。

$$\tau_{ij} = 2E\varepsilon_{ij} \quad (12)$$

これは、まさしくフックの法則を表す。この関係式は、

ひずみのある個所にはかならずそれを引き起こす応力が存在することを表すものとなっている。

ここまでの展開で注目すべきは、フックの法則にただ1つの弾性係数のみが係わっている点にある。式(10)に示すフックの法則に規定される応力  $2E\varepsilon_{ij}$  を以下「弾性応力」と呼ぶことにする。

式(10)は、外部応力が内部圧と弾性応力とで支えられることを表す。また、式(11)は、材料の弾性変形は、外部応力と内部圧とによるものであることを表す。

ところで、外部応力が作用しない場合、式(11)は次なる関係を与える。

$$p\delta_{ij} = 2E\varepsilon_{ij} \quad (13)$$

すなわち、材料変形は内部圧によるものであることを表す。

ここで、式(13)に則り、自由熱膨張を考えると、材料の変形は、温度の上昇により内部圧  $p$  が上昇し、膨張変形が生じたと解釈される。しかも、その変形の様は、フックの法則に従うものであることにも注目すべきである。

自由熱膨張であっても、材料は応力の作用を受けているとする解釈は注目すべき点で、例えば自由熱膨張による破壊であっても、材料内部にそれを引き起こす応力の存在が予測され、それを破壊基準応力に設定可能となる点は、新しい応力評価といえる。

次に、縦方向1軸圧縮の場合を考えよう。横方向には外部応力の作用がないので、その方向には式(13)と同じ関係が与えられる。よって、ポアソンが横方向に見た変形は、内部圧による膨張と解釈される。したがって、破壊基準に据えるべき応力は、膨張をもたらす内部圧と説明される。

ここに示すように、自由熱膨張、1軸圧縮の場合のいづれも、破壊基準に据えるべき応力は、内部圧であることになったが、式(13)の右辺に示すように、それは弾性応力そのものとなっている。

外部応力が作用する場合であっても、式(11)に則り、材料が受けている全応力は右辺に示す弾性応力で測られる。すなわち、材料が変形している箇所にはかならず何らかの応力が作用しているものと判断される。しかも、その大きさは、ひずみの大きさに単純に比例するものであり、したがって目視観測による我々の感覚、すなわちひずみ分布から直感的に想像される応力分布とまったく同じ応力分布が予測される。

次に、自由熱膨張やポアソン効果をもたらす内部応力の物理について述べる。

式(10)における構成方程式は、従来の弾性学で用いられている構成方程式を包括するものでなければならない。従来の弾性学は、状態変化が等温であるとき、次

に示す構成方程式で内部応力が構成されるとしている<sup>8)</sup>。

$$\sigma_{ij} = -\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2GE\varepsilon_{ij} \quad (14)$$

ここに、 $\lambda$  はラーメの第2弾性係数であり、 $G$  はせん断弾性係数である。

等温状態変化に対し、式(10)が式(14)を包括するものであれば、次なる関係が与えられる。

$$-p = \lambda\varepsilon_{kk} \quad (15)$$

さらに、温度変化を伴う場合をも考えると、式(15)は次なる関係で与えられる<sup>8)</sup>。

$$-p = \lambda\varepsilon_{kk} - R\Delta T \quad (16)$$

ここに、 $\Delta T$  は絶対温度変化、 $R$  は物質定数である。

熱力学の知識を借りると、式(16)は状態量としての圧力の変動量を規定する「状態方程式」を表す。したがって、内部圧としてこれまで定義してきた応力  $p$  は、ここに状態量としての圧力の変動量と定義される。

以上の議論から、次のような結論が導かれる。

従来の応力評価は、外部応力のみに着目したものである。しかし、材料は、外部応力の作用と共に内部圧の変動の影響を受ける。内部圧の変動も材料に変形をもたらす。すなわち、材料は内部圧と外部応力との複合作用で変形を見せる。材料変形の姿は、内部圧変動と外部応力の作用とに耐える姿でもある。したがって、材料の破壊基準は、材料が応力に耐えている姿を反映する弾性応力の評価でなければならない。その応力分布は、式(11)に示すように、ひずみ分布に単に弾性係数を乗じたものであり、分布形としてはひずみ分布と同じものである。したがって、ここに提案される新しい応力評価は、我々の目視観測で材料の変形具合から感覚的に判断される応力分布、すなわち、「よくひずんでいる箇所に大きな応力が作用する」という直感的判断と一致する。

#### 4. 新たな応力評価の実験値への適用

提案される新たな応力評価は、式(11)の左辺に示す外部応力と内部応力との合応力、すなわち右辺に示す弾性応力で評価される。弾性応力は、外部応力と内部圧という能動的(active)な応力に材料が弾性的に抵抗する受動的(passive)な応力と定義される。材料の変形は、材料が能動的な応力に抵抗する姿を表し、材料破断は材料内部の弾性ばねの破断に例えられる。したがって、材料の強さを表す応力は、弾性ばねが働く最大の引張応力を以て測られる。これは、式(11)の右辺に示す弾性応力が示す最大主応力で与えられる。

岡島<sup>1),2),3)</sup>は、様々な複合応力の作用の下で、コンクリート材の破断時の最大主ひずみを整理している。文献3)では、それらの結果が図-3にまとめられている。文献3)の図-3に示す最大主ひずみを式(11)に適用し、ひずみ量に単に弾性係数を乗じて、破断時の弾性応

力の最大主応力が求められる。こして得られた結果を図-2に示す。

図中、横軸は通常の定義に従う主応力の平均値で与えられる平均圧力（静水圧応力）を表し、縦軸は算出された破壊時の弾性応力の最大主応力、すなわち新たな応力評価に基づく材料の強さを表す。また、図中、矢印で指し示すデータは、1軸圧縮試験の場合に対応する。実線の実線矢印で示すデータが圧縮強度 28MPa の場合に対応し、破線の矢印で示すデータが圧縮強度 43MPa の場合に対応する。

図-2の横軸に示す平均圧力は、文献3)の図-3に示す8面体垂直応力と同じものであり、単位をMPaに統一してある。したがって、図-2の横軸の正圧側に位置するデータは純引張の場合に対応し、平均応力がゼロ付近のデータは純せん断試験に極めて近い場合に対応する。

新たな応力評価に従う破壊基準は、材料強さが純圧縮側で高くなり、純引張側で低くなる傾向となることを示している。平均応力が負の方向に高くなることは変形により材料密度が高まることを表す。逆に、平均応力が正の方向に高まることは材料密度が下がることを意味する。したがって、圧縮試験の場合は、材料変形による密度増加により他の試験の場合よりも幾分材料の強さが増すことを意味するものと判断される。

Kupferら<sup>7)</sup>は、2軸応力を受ける場合について、主応力の組み合わせで破壊応力が定まるとしている。こうした方法の場合、破壊基準から破壊応力の大きさを与えることができても、破壊面の方向を定めることは難しい。さらに、応力が複雑化し、3軸応力状態になると実験結果の整理も煩雑なものとなる。

これに対し、提案する基準は、いかなる複合応力を受ける場合であっても、最大主応力の大きさとその面の方向のみに着目するので、極めて単純であり、実験データの整理も簡単なものとなる。さらに、状態量として内部圧を用いているので、温度変化を伴う場合であっても容易に対応可能となる。

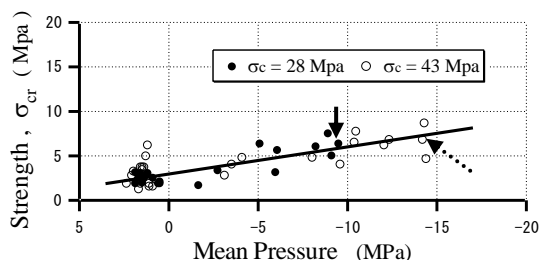


図-2 最大主ひずみから得られた材料強さと平均応力の関係（最大主ひずみデータは、文献3)による。実線および破線の矢印で示すデータは純圧縮の場合を示す）

## 5. おわりに

従来の応力評価は、外部作用応力に係る内部応力のみに着目するものであった。しかしながら、ポアソン効果や自由熱膨張に見るように、材料は外部応力のみでなく、内部圧の影響をも受けて変形している。したがって、外部応力による材料変形のみに対応する応力評価となっている従来の評価では、正しく材料が受ける応力の評価が行えていない。

ポアソンは、外部作用応力に直接比例していない材料の変形の存在に気づいたが、その予測に独自の経験則を導入した。その経験則は、式(1)で与えられ、予測されるひずみが応力と関連づけられず、ひずみ比として与えられるというものであった。ここに、ひずみが現れても応力が予測できない所以の緒があったと言える。

筆者は、ポアソンが予測しようとしたひずみに対してもフックの法則を適用した。それは、そのひずみを引き起こす応力を材料外部でなく、内部に認めることで実現された。

いかなる材料であっても熱力学の関係式は満たされなければならない。熱力学の助けを借り、一軸圧縮の場合、自由熱膨張の場合を考えると、内部圧は、状態量である材料密度と温度で規定される状態量としての圧力の変動量と定義される。

材料変形に外部応力と内部圧とが係わることを認めた内部応力式は、式(10)で与えられる。したがって、材料内部の応力として、まず内部圧が存在する。次に、材料変形量に比例する（フックの法則に規定される）弾性応力が存在する。その内、内部圧は能動的に作用し、弾性応力は受動的応力と定義される。材料変形は、外部応力と内部圧によるもので、弾性応力は材料の弾性がそれらの応力の作用に抵抗することで発現する。

かくして、材料の力学的耐力、すなわち材料の強さは弾性応力の大きさを以て測られる。すなわち、コンクリート材のような引張破壊を示す脆性材料の強さは、弾性応力の最大主応力を以て測られる。

この手法を、岡島の実験結果に適用し、材料強さが系統的に整理できることが示された。この手法は極めて簡便であり、破壊応力と破壊面の方向とを同時に決められるという利点をも持つ。何よりも、我々が目視観測により下す直感的・感覚的な応力評価と一致するとする点に実用上の有益さがあると判断される。また、提案理論により、「最大主ひずみ説」と「最大主応力説」とが実質的に同じ内容を表すことが示された。

ここに示す手法に従い、kupferらをはじめとして多くの研究者らによってこれまで蓄積されてきた破壊基準に対するデータを整理することができると考えられるが、その点や新たな手法に対する物理的考察等について

の詳細は、別の機会に紹介したい。

**謝辞**：本研究を遂行するにあたり、東京工業大学名誉教授日野幹雄、名古屋大学名誉教授岡島達雄、琉球大学名誉教授津嘉山正光、琉球大学教授山川哲雄・伊良波繁雄に多大なご指導を頂いた。ここに記し、感謝の意を表す。

#### 参考文献

- 1) 岡島達雄：複合応力（圧縮・ねじり，引張・ねじり）を受けるコンクリートの破壊条件，日本建築学会論文集，第 178 号，pp.1-8，1970.
- 2) 岡島達雄：複合応力（内圧・圧縮，内圧・引張）を受けるコンクリートの破壊条件，日本建築学会論文集，第 199 号，pp.7-16，1972.
- 3) 岡島達雄：2 軸応力を受けるコンクリートの破壊ひずみ，材料，第 22 巻，第 232 号，pp.33-37，1973.
- 4) Wu H. C.: Dual Failure criterion for plain concrete, J. of the Eng. Mechanics Division, ASCE, Vol. 100, No. EM6, December, pp. 1167-1181, 1974.
- 5) Chen W. F.: Constitutive equations for engineering materials, JOHN WILEY & SONS, 580P., 1982.
- 6) Nelissen L. J. M.: Biaxial testing of normal concrete, HERON, Vol. 18, No.1, Delft, 90p., 1972.
- 7) Kupfer, H. , H. K. Hilsdorf, H. Rusch: Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses, Jour. of A.C.I., 66, pp.656-666, 1973.
- 8) Fung Y. C. :A first course in continuum mechanics, Third edition, Prentice Hall, 311p., 1994.
- 9) 仲座栄三：物質の変形と運動の理論，ボーダイソク，427p., 2005.
- 10) 仲座栄三：新たな弾性理論による破壊解析，日本機械学会，第 21 回計算力学講演会，2p., 2008.